PART3　常用対数と不等式

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　2^n が 15 桁の数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\left(\frac{5}{3}\right)^n > 3000$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

Point Pickup

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

⑴ $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

⑵ $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 6000$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

第 13 講　PART3 確認問題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

1 $\left(\dfrac{1}{30}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて 0 でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

$n =$ アイ

2 $\left(\dfrac{5}{2}\right)^n < 3600$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

$n =$ ウ

PART3　常用対数と不等式

例題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　2^n が 15 桁の数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n>3000$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

(1)　2^n が 15 桁の数のとき　$10^{14}\leqq 2^n<10^{15}$

各辺，常用対数をとると

$\log_{10}10^{14}\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}10^{15}$　　$14\leqq n\log_{10}2<15$

$14\leqq 0.3010n<15$

よって　$\dfrac{14}{0.3010}\leqq n<\dfrac{15}{0.3010}$　より　$46.5\cdots\cdots\leqq n<49.8\cdots\cdots$

したがって，求める最小の自然数 n は　$n=47$

(2)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n>3000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n>\log_{10}3000$ …… ①

ここで　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n=n\log_{10}\dfrac{10}{6}=n(\log_{10}10-\log_{10}2-\log_{10}3)$

$=n(1-0.3010-0.4771)=0.2219n$

$\log_{10}3000=\log_{10}(3\times10^3)=\log_{10}3+\log_{10}10^3=0.4771+3=3.4771$

よって，①より　$0.2219n>3.4771$　　$n>\dfrac{3.4771}{0.2219}=15.6\cdots\cdots$

したがって，求める最小の整数 n は　$n=16$

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第20位に初めて0でない数字が現れるような整数 n を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 6000$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{20}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第20位に初めて0でない数字が現れるとき

$$10^{-20} \leqq \left(\frac{1}{20}\right)^n < 10^{-19}$$

各辺，常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-20} \leqq \log_{10} \left(\frac{1}{20}\right)^n < \log_{10} 10^{-19} \qquad -20 \leqq n \log_{10} \frac{1}{20} < -19 \ \cdots\cdots \ ①$$

ここで　$\log_{10} \dfrac{1}{20} = -\log_{10}(2 \times 10) = -(\log_{10} 2 + \log_{10} 10) = -(0.3010 + 1) = -1.3010$

よって，①より　$-20 \leqq -1.3010n < -19$

$$\frac{19}{1.3010} < n \leqq \frac{20}{1.3010} \qquad 14.6\cdots < n \leqq 15.3\cdots$$

したがって，求める整数 n は　$n = 15$

(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 6000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < \log_{10} 6000 \ \cdots\cdots \ ①$

ここで　$\log_{10} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = n \log_{10} \dfrac{10}{8} = n(\log_{10} 10 - 3\log_{10} 2) = n(1 - 3 \times 0.3010) = 0.097n$

$$\begin{aligned}\log_{10} 6000 &= \log_{10}(2 \times 3 \times 10^3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 3 \\ &= 0.3010 + 0.4771 + 3 = 3.7781\end{aligned}$$

よって，①より　$0.097n < 3.7781$　　$n < \dfrac{3.7781}{0.097} = 38.9\cdots\cdots$

したがって，求める最大の整数 n は　$n = 38$

第13講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：10

[解説]

$\left(\dfrac{1}{30}\right)^n$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて

0 でない数字が現れるとすると [A]

$$10^{-15} \leqq \left(\frac{1}{30}\right)^n < 10^{-14}$$

各辺，常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-15} \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{30}\right)^n < \log_{10} 10^{-14}$$

$$-15 \leqq n\log_{10}\frac{1}{30} < -14 \quad \cdots\cdots①$$

ここで

$$\log_{10}\frac{1}{30} = -\log_{10}(3\times 10)$$

$$= -(\log_{10}3 + \log_{10}10)$$

$$= -(0.4771+1)$$

$$= -1.4771$$

よって，①より

$$-15 \leqq -1.4771n < -14$$

$$\frac{14}{1.4771} < n \leqq \frac{15}{1.4771}$$

$$9.4\cdots\cdots < n \leqq 10.1\cdots\cdots$$

したがって，求める整数 n は

$$\boldsymbol{n=10}$$

[A]　正の数 N は小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる

$\Longleftrightarrow 10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$

2 [正解] ウ：8

[解説]

$\left(\frac{5}{2}\right)^n < 3600$ について，両辺の常用対数をとると [B]

$$\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^n < \log_{10}3600 \quad \cdots\cdots ①$$

[B]　常用対数を用いて，指数関数を含む不等式を満たす整数解を求める。

ここで

$$\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^n = n\log_{10}\frac{10}{4}$$
$$= n(\log_{10}10 - 2\log_{10}2)$$
$$= n(1 - 2\times 0.3010)$$
$$= 0.3980n$$

$$\log_{10}3600 = \log_{10}(2^2\times 3^2\times 10^2)$$
$$= 2\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + 2\log_{10}10$$
$$= 2\times 0.3010 + 2\times 0.4771 + 2$$
$$= 3.5562$$

よって，①より

$$0.3980n < 3.5562$$

$$n < \frac{3.5562}{0.3980} = 8.9\cdots\cdots$$

したがって，求める最大の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 8}$$